CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„OPT *SPRE* ZECE”

29 MARTIE 2025

EDIȚIA a VIII a

CLASA A V A - BAREM

SUBIECTUL I **(7 PUNCTE)**

Fie numărul $A = 52 + 51 \cdot 52 + 51 \cdot 52^2 + \cdots + 51 \cdot 52^{600}$

a) Arătați că $A = 52^{601}$.

b) Scrieți numărul A ca o sumă dintre un pătrat perfect și un cub perfect.

1 p din oficiu

a) $A = 52 + 51 \cdot 52 + 51 \cdot 52^2 + \cdots + 51 \cdot 52^{600}$

$= 52(1 + 51) + 51 \cdot 52^2 + \cdots + 51 \cdot 52^{600}$ 1 p

$= 52^2 + 51 \cdot 52^2 + \cdots + 51 \cdot 52^{600}$

$= 52^2(1 + 51) + 51 \cdot 52^3 + \cdots + 51 \cdot 52^{600}$

$= 52^3 + 51 \cdot 52^3 + \cdots + 51 \cdot 52^{600}$ 1 p

$= \cdots \ldots \ldots .. = 52^{600} + 51 \cdot 52^{600}$

$= 52^{601}$ 1 p

b) $52 = 5^2 + 3^3$ 1 p

$A = 52^{600} \cdot (5^2 + 3^3) = 52^{600} \cdot 5^2 + 52^{600} \cdot 3^3$ 1 p

$= (52^{300} \cdot 5)^2 + (52^{200} \cdot 3)^3$ 1 p

SUBIECTUL II **(7 PUNCTE)**

Se consideră șirul de fracții $\frac{7}{10}; \frac{8}{15}; \frac{9}{20}; \frac{10}{25}; \ldots$

a) Scrieți în ordine descrescătoare fracțiile $\frac{7}{10}; \frac{8}{15}; \frac{9}{20}$

b) Determinați a 1000-a fracție și a 2025-a fracție din șir.

1 p din oficiu

a) .

$Avem\ \frac{7}{2} > \frac{8}{3} > \frac{9}{4}\ ,de\ unde\ \frac{7}{2 \cdot 5} > \frac{8}{3 \cdot 5} > \frac{9}{4 \cdot 5}, adică\ \frac{7}{10} > \frac{8}{15} > \frac{9}{20}$

$\boldsymbol{Altfel}: observăm\ că\ \frac{7}{10} = \frac{2 + 5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

$\frac{8}{15}=\frac{3+5}{3\cdot5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$
$\frac{9}{20}=\frac{4+5}{4\cdot5}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

$Cum\ \frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}\ .rezultă\ \frac{1}{2}+\frac{1}{5}>\frac{1}{3}+\frac{1}{5}>\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ .rezultă\ \frac{7}{10}>\frac{8}{15}>\frac{9}{20}$ 3 p

b) .

$A\ 1000-a\ fracție\ este\ \frac{1}{5}+\frac{1}{1001}=\frac{1006}{5005}$

$A\ 2025-a\ fracție\ este\frac{1}{5}+\frac{1}{2026}=\frac{2031}{10130}$ 3 p

SUBIECTUL III **(7 PUNCTE)**

Un turist parcurge un traseu în trei zile. În prima zi parcurge 25% din traseu, a doua zi 0,6 din rest, iar a treia zi restul de 102 km. Care este lungimea traseului și raportul distanțelor parcurse în prima și a doua zi de turist?

1 p din oficiu

$rima\ zi\ \ 25\%=\frac{1}{4}=\frac{5}{20}, a\ doua\ zi\ 0{,}6\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{20}, a\ treia\ zi\ \frac{6}{20}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$

$\frac{1}{20}\ reprezintă\ 17\ km\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$

$Lungimea\ traseului\ 340\ km\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$

$Raportul\ lungimilor\ distanțelor\ parcurse\ în\ prima\ și\ a\ doua\ zi\ este\ \frac{85}{153}=\frac{5}{9}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$

Sau – folosesc metoda figurativă
Realizează corect figura 2 p
Află distanța parcursă în a doua zi 1 p
Află distanța parcursă în prima zi 1 p
Află lungimea traseului 1 p
Calculează raportul 1 p

SUBIECTUL IV **(7 PUNCTE)**

Pe o tablă sunt scrise, la început, numerele 20 și 23. La un pas, dacă pe tablă sunt scrise numerele a și b, Alexia scrie pe tablă un număr nou, diferit de cele scrise deja pe tablă, egal cu $a+b+1$.

a) Arătați că, indiferent câți pași ar efectua, Alexia nu poate scrie pe tablă numărul 223.

b) Stabiliți dacă este posibil ca, după mai mulți pași, Alexia să scrie pe tablă numărul 2123.

1 p din oficiu

a)

Observăm că 23 și 20 dau același rest la împărțirea cu 3, așadar 20 și 23 sunt numere de forma $M_3 + 2$ 1 p

Vom arăta că dacă $a = 3x + 2$, iar $b = 3y + 2$, atunci numerele scrise pe tablă au forma $M_3 + 2$

$a + b + 1 = (3x + 2) + (3y + 2) + 1 = 3x + 3y + 3 + 2 = M_3 + 2$ 1 p

Luăm primele 2 numere scrise pe tablă: 20 și 23, care au forma $M_3 + 2$, atunci toate numerele scrise pe tablă au forma $M_3 + 2$

$223: 3 = 74\, rest 1 \rightarrow 223 = M_3 + 1$, așadar 233 nu poate fi scris pe tablă 1 p

b).

Voi scrie un algoritm prin care îl pot scrie pe 2123

Pas1: avem 20 și 23, scriem $23 + 20 + 1 = 23 + 21$

Pas2: avem 20 și $23 + 21$, scriem $20 + (23 + 21) + 1 = 23 + 21 \cdot 2$

Pas3: avem 20 și $23 + 21 \cdot 2$, scriem $20 + (23 + 21 \cdot 2) + 1 = 23 + 21 \cdot 3$

.....

Pas 99: avem 20 și $20 + 21 \cdot 98$, scriem $20 + (23 + 21 \cdot 98) + 1 = 23 + 21 \cdot 99$

Pas 100: avem 20 și $23 + 21 \cdot 99$, scriem $20 + (23 + 21 \cdot 99) + 1 = 23 + 21 \cdot 100 = 2123$

Așadar putem să-l scriem pe 2123

Se acordă 1 p pentru cei care au ideea de a căuta algoritmul

Se acordă 3 p pentru rezolvare corectă