CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„OPT *SPRE* ZECE”

29 MARTIE 2025

EDIȚIA a VIII a

CLASA A VI A - BAREM

1. a. Calculați:

$$(|2^{50}-3^{75}|+2^{50})\cdot(2^{90}+|2^{90}-3^{60}|)\div 3^{135}-2023^0$$

1p oficiu

Explicitare module...1p

$3^{75}\cdot 3^{60}\div 3^{135}-2023^0=$ 1p

finalizare...1p

b. Aflați numărul rațional x care verifică egalitatea:

$$\frac{1}{2}\%din\left(\frac{2}{3}\%din\left(\frac{3}{4}\%din\left(\dots\left(\frac{n}{n+1}\%din\ x\right)\dots\right)\right)\right)=\frac{1}{100^n\cdot(n+1)}$$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{100}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{100}\left(\dots\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{100}\cdot x\right)\dots\right)\right)\right)=\frac{1}{100^n\cdot(n+1)}$..1p

$\frac{1}{100^n\cdot(n+1)}\cdot x=\frac{1}{100^n\cdot(n+1)}$...1p

$x=1$.. 1p

2. Fie punctele conciclice A,B,C,D,E alese pe cerc în această ordine astfel încât $\widehat{AB},\ \widehat{BC}$ au măsurile direct proporționale cu 8 și 11 iar $\widehat{BC},\ \widehat{CD}$ invers proporționale cu numerele 3 și $\frac{11}{23}$. Dacă $\widehat{AB}\cdot\widehat{BC}\cdot\widehat{CD}=6072^0$, iar E un punct diametral opus lui A. Determinați măsurile arcelor $\widehat{AB},\ \widehat{BC},\ \widehat{CD},\ \widehat{DE}$.

1p oficiu

$\{\widehat{AB},\ \widehat{BC}\}\ d.p\{8,11\}\rightarrow\cdots\rightarrow\ \widehat{AB}=8k,\ \widehat{BC}=11k$..1p

$\{\widehat{BC},\ \widehat{CD}\}\ i.p\{3,\frac{11}{23}\}\rightarrow\cdots\rightarrow\ \widehat{BC}=11k,\ \widehat{CD}=69k$...1p

Se determină $k=1$...2p

$\widehat{AB}=8^\circ,\ \widehat{BC}=11^\circ,\ \widehat{CD}=69^\circ,\ \ \widehat{DE}=92^\circ$ 2p

3. Aflați numerele $\overline{ab}$ știind că $\frac{\overline{ab}+4b}{a+2b} \in \mathbb{N}$ și $\frac{\overline{ba}+4a}{2a+b} \in \mathbb{N}$.

1p oficiu

Pt scrierea lui $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ în baza 10...1p

Fie $x = \frac{\overline{ab}+4b}{a+2b} = \frac{5(2a+b)}{a+2b}$ și $y = \frac{\overline{ba}+4a}{2a+b} = \frac{5(2b+a)}{2a+b}$...2p

$x \cdot y = 25, (x, y) = \{(1,25), (5,5), \dots\}, cu\ x\ și\ y\ naturale$...2p

$\overline{ab} = \{11, 22, 33, \dots, 99\}$...1p

4. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ și $\measuredangle ABC = 72^\circ$. Pe dreapta BC considerăm un punct D astfel încât C este situat între D și B, iar $CD = AB$. Fie E un punct situat în același semiplan cu A față de BD, astfel încât $DE \parallel AB$ și $DE = BD$. Notăm cu F punctul de intersecție a dreptelor AD și BE.
   a. Arătați că $(AC$ este bisectoarea $\measuredangle BAD$.
   b. Demonstrați că dreptele AC și AE sunt perpendiculare.

1p oficiu

a. $\Delta ABC \rightarrow \measuredangle B \equiv \measuredangle C = 72^\circ \rightarrow \measuredangle BAC = 36^\circ$..1p

$$\left.\begin{array}{r} AB = AC\ și\ \ CD = AB\ \rightarrow \cdots\ \rightarrow \Delta ACD - isoscel \\ \measuredangle ACD\ ext\ \Delta ABC \rightarrow \measuredangle ACD = 108^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \measuredangle CAD \equiv \measuredangle CDA = 36^\circ \text{..........1p}$$

$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle CAD = 36^\circ \rightarrow (AC - bisectoarea\ \measuredangle BAD$..1p

b. $\Delta BAD,\ \measuredangle BAD = 72^\circ, \measuredangle ABD = 72^\circ \rightarrow \Delta BAD - isoscel \rightarrow BD = AD$

$DE \parallel AB\ și\ BD\ secantă \rightarrow \measuredangle ABD + \measuredangle BDE = 180^\circ\ \ (interne\ de\ aceeași\ parte\ a\ secantei) \rightarrow$ $\measuredangle BDE = 108^\circ$...1p

$$DE = BD \rightarrow \Delta BDE - isoscel \rightarrow \measuredangle DBE \equiv \measuredangle BDE = 36^\circ$$

$Cum\ AD = BD\ și\ DE = BD\ avem\ AD = DE \rightarrow \measuredangle DAE \equiv \measuredangle DEA = 54^\circ$............................1p

$\measuredangle CAE = \measuredangle CAD + \measuredangle DAE = 90^\circ \rightarrow AC \perp AE$...1p