CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„OPT *SPRE* ZECE”

29 martie 2025

EDIȚIA a VIII a

Barem de corectare și notare

Clasa a VII a

SUBIECTUL I: Oficiu...1 p

a) $n < n+1 \Rightarrow n^2 < n(n+1)$ 1p

$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n(n+1)}$ 1p

b) $E > 1 + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots \ldots\ldots\ldots. + \frac{1}{100\cdot101}$ 1p

$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots. + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$ 1p

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{101} = \frac{303-2}{202} = \frac{301}{202}$ 1p

$\frac{301}{202} > \frac{7}{5} \Leftrightarrow 1505 > 1414\ (A)$ 1p

SUBIECTUL II: Oficiu...1 p

a) $E = |a-\sqrt{2}| + |2a-\sqrt{3}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}|$ ....1 p

$|a-\sqrt{2}| = -a+\sqrt{2}$, $|2a-\sqrt{3}| = 2a-\sqrt{3}$, $|\sqrt{2}-\sqrt{3}| = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ....1 p

$E = a$...1 p

b) $\frac{a\sqrt{2}+a+b\sqrt{2}-b}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 7-3\sqrt{2}$ ....1 p

$a-b-7 = -\sqrt{2}(3+a+b) \Longrightarrow a+b+3=0$ și $a-b-7=0$ ....1 p

$a=2$ și $b=-5$ ....1 p

SUBIECTUL III:

Oficiu..1p

$xy+xz+yz = xyz \Leftrightarrow \frac{xy+xz+yz}{xyz} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1$

Fără a restrânge generalitatea putem fixa

$x \le y \le z \Rightarrow \frac{1}{x} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x} \ge \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \Rightarrow \frac{3}{x} \ge 1 \Rightarrow x \le 3 \Rightarrow x \in \{1,2,3\}$ ....1 p

Cazul 1: $x=1 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 0$, nu obținem soluții deoarece $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} > 0$

Cazul 2: x=2

$\Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow yz = 2(y+z) \Leftrightarrow yz-2y-2z+4 = 4 \Leftrightarrow (y-2)(z-2) = 4$ ....1 p

Obținem soluțiile $(2,4,4)$; $(2,3,6)$; $(2,6,3)$ ....1 p

Cazul 3: x=3 $\Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2yz = 3(y+z) \Rightarrow (2y-3)(2z-3) = 9$ ....1 p

Obținem soluțiile $(3,6,2)$; $(3,2,6)$; $(3,3,3)$ ....1 p

Soluțiile ecuației date sunt:

$(2,4,4)$; $(4,2,4)$; $(4,4\ 2)$; $(2,3,6)$; $(3,2,6)$; $(3,6,2)$; $(6,3,2)$; $(6,2,3)$; $(2,6,3)$; $(3,3,3)$....1 p

SUBIECTUL IV:

Oficiu..1p

Fie ABCD un patrulater convex și G, T, S, P centrele de greutate ale ΔABC, ΔBCD, ΔCDA respectiv ΔDAB. Considerăm M –mijlocul segmentului AB. Evident $G \in CM$ și $P \in DM$.

În ΔMCD : $\frac{MG}{MC} = \frac{MP}{MD} = \frac{1}{3} \Longrightarrow PG \parallel CD$ și Δ MGP~ΔMCD $\Longrightarrow \frac{PG}{CD} = \frac{1}{3}$ 1p

Dacă N este mijlocul lui CD, evident $S \in AN$ și $T \in BN$

În ΔNAB : $\frac{NS}{NA} = \frac{NT}{NB} = \frac{1}{3} \Longrightarrow ST \parallel AB$ și ΔNST~ΔNAB $\Longrightarrow \frac{ST}{AB} = \frac{1}{3}$ 1p

Analog $SP \parallel BC$ cu $\frac{SP}{BC} = \frac{1}{3}$ și $GT \parallel AD$ cu $\frac{GT}{AD} = \frac{1}{3}$ 1p

Patrulaterele TSPG și ABCD au laturile respectiv proporționale și unghiurile respectiv congruente.

$\Delta PGT \sim \Delta CDA\ (LUL) \Longrightarrow \frac{\mathcal{A}\Delta PGT}{\mathcal{A}\Delta CDA} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ 1p

$\Delta TSP \sim \Delta ABC\ (LUL) \Longrightarrow \frac{\mathcal{A}\Delta TSP}{\mathcal{A}\Delta ABC} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ 1p

$\mathcal{A}[ABCD] = \mathcal{A}\Delta ABC + \mathcal{A}\Delta CDA = 9\mathcal{A}\Delta TSP + 9\mathcal{A}\Delta PGT = 9(\mathcal{A}\Delta TSP + \mathcal{A}\Delta PGT) = 9\mathcal{A}[TSPG]$ 1p