CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„OPT *SPRE* ZECE”

29 MARTIE 2025

EDIȚIA a VIII a

BAREM DE CORECTARE - CLASA A VIII A

Subiectul 1 (7 puncte)

Fie expresia $E(x) = \left(\frac{2x+6}{x^2+5x+6} - \frac{5}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}\right) : \frac{x+4}{x^2-x-2}$, $x \in R - \{-4, -3, -2, -1, +2\}$.

a) Arătați că $E(x) = \frac{-3(x+1)}{x+4}$, pentru $x \in R - \{-4, -3, -2, -1, +2\}$.

b) Determinați valorile lui x, x număr întreg, pentru care E(x) este număr întreg.

a) $E(x) = \left(\frac{2(x+3)}{(x+3)(x+2)} - \frac{5}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}\right) : \frac{x+4}{x^2-x-2}$ 1p

$E(x) = \frac{2x-4-5x-10+8}{x^2-4} : \frac{x+4}{x^2-x-2}$ 1p

Finalizare 1p

b) $E(x) \in Z \leftrightarrow \frac{-3x-3}{x+4} \in Z \leftrightarrow (x+4)/(-3x-3)$ 1p

(x + 4)/9 .... 1p

Finalizare, x ∈ {-13, -7, -5, 5} 1p

Oficiu 1p

Subiectul II (7 puncte)

Se consideră numerele reale pozitive a, b, c cu ab + ac + bc = 1. Arătați că:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, oricare ar fi a, b, c numere reale pozitive.

b) $a^4 + b^4 + c^4 + a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$, oricare ar fi a, b, c numere reale pozitive.

a) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0$ 1p

Finalizare 1p

b) $3(a^4 + b^4 + c^4) + 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4$

$3(a^4 + b^4 + c^4) = 2(a^4 + b^4 + c^4) + (a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) + (a^4 + b^4 + c^4)$

$3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$ 1p

$3(a^2 + b^2 + c^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ac =$

$2(a^2 + b^2 + c^2) + 1$ 1p

$3(a^4 + b^4 + c^4) + 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) + 1 = (a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2$

.... 1p

$(a^2 + b^2 + c^2 + 1)^2 \geq (ab + bc + ca + 1)^2 = 2^2 = 4$ 1p

Oficiu 1p

Subiectul III (7 puncte)

Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AB = 2\sqrt{2}$ cm, $AA' = 4$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Determinați distanța de la punctul D' la dreapta AC.
b) Determinați sinusul unghiului dintre dreptele BC' și EO, unde $A'D \cap AD' = \{E\}$.

a) Distanța de la punctul D' la dreapta AC este D'O – demonstrație 1p
Calcul, $AC = 4$ cm, $D'O = 2\sqrt{5}$ cm 2p
b) $BC' \parallel AD'$, $\widehat{BC', EO} = \widehat{AEO}$
ΔAEO, $EO = AE = \sqrt{6}$ cm, $AO = 2$ cm 1p
$A_{\Delta AEO} = \frac{AO \cdot x}{2}$, $x = d(E, AO)$, $x = \sqrt{5}$ cm 1p
$AO \cdot x = AE \cdot EO \cdot \sin\widehat{AEO}$, $\sin\widehat{BC', EO} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 1p
Oficiu 1p

Subiectul IV (7 puncte)

Se dă rombul ABCD cu $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Dacă VD este perpendiculară pe planul rombului, $VD = a$ iar M și N sunt mijloacele segmentelor VD, respectiv CD, atunci:

a) Demonstrați că BN este perpendiculară pe planul (VCD).
b) Determinați distanța de la punctul A la planul (BMN).

a) ΔBCD echilateral 1p
$BN \perp DC$, $BN \perp VD$, finalizare 1p
b) Notăm $AD \cap BN = \{P\}$, N mijloc BP, M mijloc AP
Fie dreapta d perpendiculară pe (ABC), $A \in d$, $d \cap MP = \{T\}$, (MNB)=(MNP)=(TBP)
.... 1p
$AF \perp TB$, $AF \perp (TBP)$ și $DQ \perp MN$, $DQ \perp (NMP)$ 1p
DQ linie mijlocie în Δ PAF, $DQ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, finalizare... 2p
Oficiu 1p

NOTĂ
Orice soluție diferită de cea prezentată în barem se va puncta corespunzător.